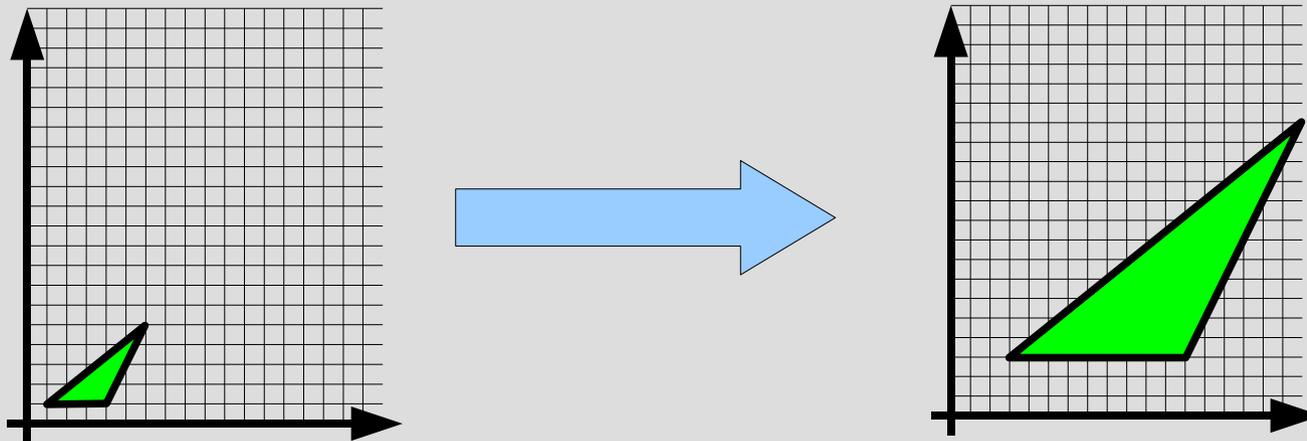


# Trasformazioni affini

- Abbiamo visto che l'uso delle semplici coordinate cartesiane comporta qualche difficoltà nell'applicazione delle trasformazioni 2D
  - Per esempio: l'ingrandimento “sposta” contemporaneamente l'oggetto ingrandito



# Trasformazioni affini

- Una **trasformazione lineare** è una funzione fra spazi che preserva le **combinazioni lineari** (operazioni di *somma* e di *moltiplicazione per scalare*)
- Una **trasformazione affine** è una trasformazione esprimibile come somma di una **trasformazione lineare** seguita da una **traslazione**
- Es.: scalature, traslazioni, rotazioni, riflessioni, *shear* e *skew*

# Coordinate omogenee

- Usando le **coordinate omogenee**, tutte le trasformazioni affini possono essere espresse come una semplice **moltiplicazione fra matrici**
- Coordinate di un punto
  - Coordinate cartesiane:  $[ x \ y ]$
  - Coordinate omogenee:  $[ x \ y \ 1 ]$ 
    - sarebbero possibili anche altri valori per il terzo elemento, ma 1 è una scelta comoda

# Moltiplicazione tra matrici

- **Nota: moltiplicazione tra matrici**

- date due matrici  $A$  di dimensione  $m \times n$  e  $B$  di dimensione  $n \times p$ , il **prodotto** fra  $A$  e  $B$  è una matrice  $R$  di dimensione  $m \times p$
- l'elemento di indice  $(i,j)$  è calcolato come segue:

$$R_{i,j} = \sum_{k=0}^n A_{i,k} B_{k,j}$$

# Moltiplicazione tra matrici

- Esempio: moltiplicazione fra matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- segue banalmente dalla definizione...

# Moltiplicazione tra matrici

- Esempio: moltiplicazione fra matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 0 & 3 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 0 & 3 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 0 & 3 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 3 + 2 \times 0 & 3 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Traslazione**

- formulazione in coordinate cartesiane

$$p = [x \quad y], \delta = [a \quad b]: p + \delta = [x + a \quad y + b]$$

- formulazione in coordinate omogenee

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \Delta p = [x + a \quad y + b \quad 1]$$

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Scalatura (uniforme)**

- formulazione in coordinate cartesiane

$$p = [x \quad y]: \quad \alpha p = [\alpha x \quad \alpha y]$$

- formulazione in coordinate omogenee

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \quad Ap = [\alpha x \quad \alpha y \quad 1]$$

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Scalatura (non uniforme)**

- formulazione in coordinate cartesiane

$$p = [x \quad y]: \quad \alpha p = [\alpha_x x \quad \alpha_y y]$$

- formulazione in coordinate omogenee

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \quad Ap = [\alpha_x x \quad \alpha_y y \quad 1]$$

- quanto i fattori di scala sono -1, si ottengono le riflessioni speculari

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Rotazione**

- formulazione in coordinate cartesiane

$$p = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} :$$

$$p \text{ rot } \theta = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta & x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

- formulazione in coordinate omogenee

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$P p = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta & x \sin \theta + y \cos \theta & 1 \end{bmatrix}$$

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Il grande vantaggio delle coordinate omogenee è che tutte le trasformazioni diventano **moltiplicazioni**
- Le moltiplicazioni possono essere **combinare** fra di loro, creando operazioni più complesse
  - per esempio: scalatura + traslazione in una sola operazione
- La combinazione si fa moltiplicando fra loro le matrici delle operazioni

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Siano  $M_1$  e  $M_2$  due matrici di trasformazione, e  $P$  un punto (in coordinate omogenee)
- Il prodotto  $M_1 \times M_2 \times P$  è la rappresentazione, sempre in coordinate omogenee, del punto ottenuto applicando a  $P$  prima  $M_2$  e poi  $M_1$
- La matrice  $M = M_1 \times M_2$  è una matrice di trasformazione che rappresenta la combinazione delle due operazioni

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Esempio: scalatura di 3 e (poi) traslazione di  $[1 \ 5]$ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \Delta \times A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

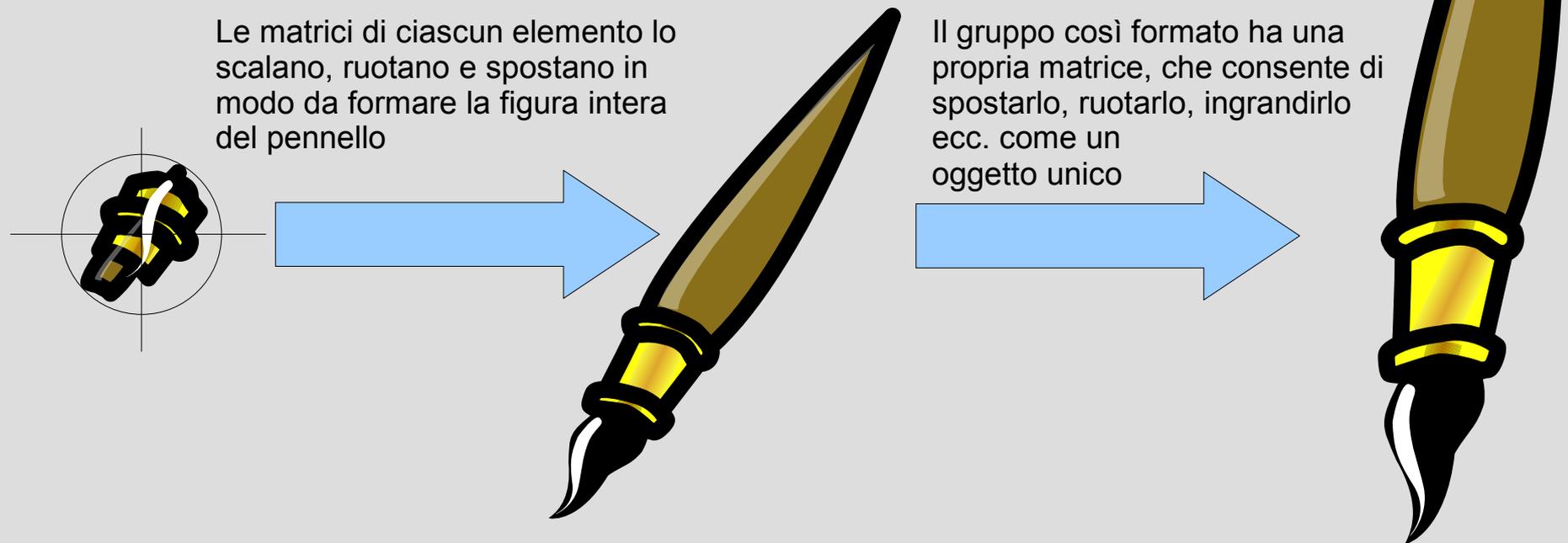
- In genere, si assume **sempre** che le figure siano, per esempio, disegnate intorno all'origine  $(0,0)$  e grandi quanto basta per stare in un cerchio di raggio 1
- Poi, si moltiplica per una opportuna matrice per portare la figura “a posto”

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Molte operazioni di disegno (spostamenti, rotazioni, ingrandimenti) fatte con i programmi di disegno vettoriale **non** modificano la posizione dei punti!
- Si limitano a cambiare la matrice di trasformazione associata alla figura!
  - di solito include traslazione, rotazione, scalatura, shear, skew, riflessione

# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Quando più figure vengono **raggruppate** in un unico gruppo, all'intero gruppo viene associata una ulteriore matrice di trasformazione



# Trasformazioni con coordinate omogenee

- Analogamente, gli interpreti dei linguaggi di grafica vettoriale (motori di rendering) contengono istruzioni speciali per stabilire le matrici di trasformazione
- In genere, esiste il concetto di **matrice di trasformazione corrente**, che viene applicata a tutti i punti disegnati
- Il disegno decide quando moltiplicare altre matrici (componendo le trasformazioni) o ripristinare la matrice precedente

# Esercizio

- Scrivere le matrici di trasformazione per:
  - ingrandire di un fattore 2 lungo l'asse x e di un fattore 4 lungo l'asse y
  - spostare di 2 unità in destra lungo l'asse x e di 2 unità in basso lungo l'asse y
  - ribaltare specularmente lungo l'asse orizzontale
- Moltiplicare fra loro queste matrici in modo che le operazioni vengano applicate nell'ordine dato sopra e scrivere la matrice di trasformazione risultante

# Esercizio

- Applicando ora la matrice risultante, si disegni nuovamente il path costruito unendo le due Bezier cubiche seguenti (esercizio della lezione precedente):
  - Primo segmento:  
[0,0], [0,5], [5,5], [5,0]
  - Secondo segmento:  
[5,0], [5,-5], [10,-10], [10,0]
- Si confrontino visivamente le due curve (originale e trasformata). Il risultato coincide con le aspettative?